Ⓐ

Base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

Leçons : 207, 213, 234, 245, 250

Réf. : Beck, Objectif agrégation p 110-111 et p. 140 (2e édition)

Th. : Soit E l'espace de Hilbert $L^2(I,\rho)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et ρ une fonction poids. On note $(P_0, P_1, \dots P_n, \dots)$ la famille orthonormale obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : x \longmapsto x^n$.

On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\, dx < +\infty$.

Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

Méthode : Par construction, $\mathrm{Vect}(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = H$, et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E.

On veut montrer qu'elle est totale, i.e. $\overline{H} = E$.

Comme $E = \overline{H} \oplus F^\perp$, cela équivaut à m.q. $H^\perp = \{0\}$.

Soit $f \in L^2(I,\rho)$. On pose

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) M.q. $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

- $\varphi = f\rho \mathbb{1}_I$ donc φ est mesurable
- $$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx = \int_I |f(x)|\, \rho(x)\, dx = \overbrace{\langle |f|, \mathbb{1}_I \rangle}^{\text{produit scalaire dans } E}$$

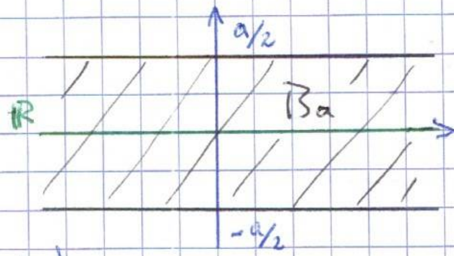
donc $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx \leq \|f\|_E \left(\int_I \rho(x)\, dx\right)^{1/2}$

donc $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx < +\infty$ et $\boxed{\varphi \in L^1(\mathbb{R})}$

On peut donc définir sa transformée de Fourier

$$\hat{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\omega \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_I f(x)\, e^{-i\omega x} \rho(x)\, dx$$

On pose également



- $B_a = \{ z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{a}{2} \}$

$B_a \subset \mathbb{C}$ est alors un ouvert connexe

- $\forall z \in B_a,\ F(z) = \int_I f(x)\, e^{-izx} \rho(x)\, dx$

Objectif: M.q. $F = 0$, donc $\hat{\varphi} = 0$ puis utiliser l'injectivité de la transformation de Fourier.

2) M.q $f \in \mathcal{O}(B_a)$

Soit $g : B_a \times I \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(z, x) \longmapsto f(x)\, e^{-izx} \rho(x)$$

- $\forall x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe entière, donc holomorphe sur B_a.
- $\forall (z,x) \in B_a \times I$,

$$|g(z,x)| = |f(x)\, e^{-i(\mathrm{Re}\, z)x}\, e^{(\mathrm{Im}\, z)x} \rho(x)|$$
$$\leq |f(x)|\, e^{|\mathrm{Im}\, z||x|} \rho(x)$$

$$\boxed{|g(z,x)| \leq |f(x)|\, e^{\frac{a}{2}|x|} \rho(x)}$$ domination

$x \in I \longmapsto |f(x)|\, e^{\frac{a}{2}|x|} \rho(x)$ est ≥ 0, mesurable, et par C-S. dans E

$$\int_I |f(x)|\, e^{\frac{a}{2}|x|} \rho(x)\, dx \leq \|f\|_E \left(\int_I e^{a|x|} \rho(x)\, dx \right)^{1/2} < +\infty$$

donc F est bien définie, et par th. d'holomorphie sous l'intégrale

$$\boxed{F \in \mathcal{O}(B_a)}$$

3) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour $f \in H^\perp$, puis conclure

a°/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Toujours par théorème d'holomorphie sous l'intégrale,

$$\forall z \in B_a,\ F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(z,x)\,dx$$

$$= (-i)^n \int_I f(x)\, x^n e^{-izx} \rho(x)\,dx$$

donc $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I f(x)\, x^n \rho(x)\,dx$

$$\boxed{F^{(n)}(0) = (-i)^n \langle f, f_n \rangle}$$

b°/ Soit $f \in H^\perp$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = 0$

On a : • $F \in \mathcal{O}(B_a)$ donc $F \in \mathcal{A}(B_a)$

• $0 \in B_a$

donc il existe $U \subset B_a$ voisinage ouvert de 0 tq F est DSE sur U,

et $\boxed{\forall z \in U,\ F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n = 0.}$

Donc $F \equiv 0$ sur U qui admet " un " point d'accumulation dans B_a, donc par principe du prolongement analytique,

$$\boxed{F \equiv 0 \text{ sur } B_a.}$$

c°/ Or, $\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}}$, donc $\hat{\varphi} \equiv 0$.

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective, donc $\boxed{f = 0.}$

On a donc $H^\perp = \{0\}$

donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale de $L^2(I,\rho)$

donc $\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base hilbertienne de } L^2(I,\rho)}$